Complemento Teórico

Introducción.

Los problemas que se resolverán en este Taller tienen que ver con ideas o conceptos matemáticos que se suponen conocidos de la escuela secundaria. Sin embargo, por lo general, estos conceptos no estarán anunciados antes de resolver cada problema, sino que el alumno deberá darse cuenta de cuál es la idea matemática que permite resolver el problema, ya sea recordándola o redescubriéndola. *Saber elegir la herramienta adecuada para resolver un problema es parte de la verdadera comprensión que se tiene acerca de esa herramienta.* Vamos a ilustrar esto con un ejemplo muy elemental: Juan tiene 6 años. La maestra le muestra que en un rincón del aula hay algunos muñecos y en el rincón opuesto hay muchos sombreros. Luego le indica que debe ir al rincón de los sombreros tomar algunos sombreros y llevarlos a donde están los muñecos para ponerle un sombrero a cada muñeco, sin que quede ningún muñeco sin sombrero y sin que le sobren sombreros. Juan sabe contar hasta veinte, recitando los números: uno, dos, tres, cuatro, etc. Pero no se le ocurre contar los muñecos y los sombreros para resolver el problema. Si la maestra le pidiera que contara los muñecos, Juan podría hacerlo. Si luego le pidiera que tomara esa cantidad de sombreros, Juan podría hacerlo y también podría ponerle los sombreros a los muñecos. Porque Juan sabe contar. Pero a Juan no se le ocurre hacer todo eso, porque, aunque sabe contar, no sabe que trece sombreros y trece muñecos se parecen en algo y que la identificación de la cantidad de muñecos y de la cantidad de sombreros con el concepto abstracto de “número trece” es el sentido principal de este concepto y sirve para resolver el problema. En conclusión: saber contar hasta veinte no implica entender qué son los números ni cómo se pueden usar.

Este cuadernillo de problemas requiere un complemento teórico para orientar al alumno en el estudio. Pero incluir el complemento teórico como parte del cuadernillo sería algo así como explicar la importancia de saber contar hasta veinte, antes de presentar el problema de los muñecos y los sombreros. Si lo hiciéramos así, el problema de los muñecos y los sombreros dejaría de servir para decidir hasta qué punto Juan entiende lo que significa contar. Por este motivo, no nos pareció conveniente acompañar el cuadernillo con una exposición teórica. Decidimos, en cambio, ofrecer a los alumnos este complemento teórico, que irán recibiendo *después* de cada clase. De esta manera, estarán más libres de ideas preconcebidas, antes de pensar los problemas y tendrán, a la vez, un resumen de esas ideas, una vez que la instancia de trabajar sobre los problemas ya se haya cumplido.

Este material se irá entregando en formato digital después de cada clase. Luego avisaremos el circuito logístico.

Entrando en calor

Ezequiel salió de su casa hacia la escuela, bebiendo distraídamente un agua saborizada en una botellita de plástico. Cerró la puerta –que tiene picaporte fijo del lado de afuera– y al instante se dio cuenta de que había olvidado las llaves adentro. Pero ya era demasiado tarde: la puerta había quedado trabada por el pestillo y Ezequiel tenía un problema: ¿cómo volver a entrar a su casa?

Sin perder la calma, se sentó a terminar su bebida con la espalda contra su puerta y a pensar alguna solución. Como la puerta no estaba cerrada con llave, necesitaba empujar el pestillo de alguna manera. Intentó deslizar una tarjeta de plástico. Probó con la SUBE y con su carnet de socio de Sportivo Desamparados, pero no eran lo suficientemente flexibles y no conseguían curvarse hasta llegar al pestillo. Volvió a sentarse y se distrajo mirando su botella de plástico ya vacía. ¡Entonces tuvo una idea! Con una tijera que llevaba en su cartuchera cortó el cuello de la botella y también la base, de manera que le quedó un cilindro de plástico, sin tapas. Luego hizo un corte recto en el cilindro, de base a base, y pudo desplegar el plástico como una lámina rectangular. Esa lámina de plástico sí resultó suficientemente larga y flexible. La deslizó con cuidado en la ranura y consiguió empujar el pestillo. La puerta se abrió y pudo ver su manojo de llaves sobre la mesa.

Dos semanas más tarde, a Diego, un amigo de Ezequiel, le sucedió el mismo accidente. Escribió un tweet para contárselo a sus amigos. Ezequiel leyó el tweet y respondió enseguida, explicándole el truco de la botella de plástico. Diego siguió las instrucciones de Ezequiel y consiguió resolver el problema de abrir su puerta.

¿Qué diferencia hay entre el problema que resolvió Ezequiel y el que resolvió Diego? Los dos hicieron lo mismo (cortar la botella) para abrir la puerta. Pero Ezequiel se encontró primero con el problema, tuvo que pensar ideas, aceptar que las primeras no funcionaran y encontrar una idea original que resultó exitosa. En cambio, a Diego le explicaron cómo resolver el problema y aplicó una solución ya conocida para un problema ya conocido. **Diego aprendió a abrir una puerta, pero no aprendió a resolver otro problema nuevo que se le pueda presentar.**

La mayoría de las veces la matemática que se enseña en la escuela apunta más a resolver problemas como el de Diego que problemas como el de Ezequiel. Se enseña un tipo de problema y el método para resolverlo, pero no se enseña a descubrir los métodos o a inventar otros métodos distintos del que propone el profesor.

En este taller deseamos desarrollar y resolver problemas matemáticos. Para eso, necesitamos conocer recursos que permitan enfrentarse a una situación nueva. Uno de esos recursos es desarrollar la confianza en las ideas propias y la capacidad de frustración para aceptar que las primeras ideas no funcionen. Los problemas de la clase titulada “Entrando en calor” apuntan a mostrar algunos métodos que sirven para resolver algunos problemas. El trabajo a lo largo de todo el taller tendrá que ver con pensar en esos métodos cada vez que nos encontremos frente a un problema nuevo, para ver si nos pueden ayudar a resolverlo o –al menos– a lograr un primer avance hacia la solución completa.

Como síntesis de esta primera clase, describimos algunos de esos métodos, usando los problemas propuestos como ejemplos.

Algunas estrategias para resolver problemas

1 **Volver a leer**: leer la consigna de un problema varias veces, antes y después de comenzar a resolverlo, para asegurarnos de comprenderla.
- Ejemplo: en el problema 1 recibieron instrucciones de un compañero para realizar un dibujo. Leer las instrucciones varias veces puede haber ayudado a realizar la construcción. En una segunda o tercera lectura se entienden detalles que en la primera lectura a veces se pierden. Esto pasa también cuando una consigna es más enredada, como sucede en el problema 4.

2 **Revisar una solución**: a veces leemos el enunciado de un problema y, para responder al mismo, realizamos un dibujo o algún cálculo y luego obtenemos una respuesta. ¿Cumple esa respuesta con todo lo que se pedía en el enunciado? Releer el enunciado con la respuesta a la vista, para controlar que no haya contradicciones.
- Ejemplo: Las instrucciones del problema 1 indicaron cómo realizar una construcción. Después de realizar la construcción, es importante volver a leer las instrucciones, comparando con la construcción realizada, para ver si se han respetado todos los detalles de las instrucciones.
- Otro ejemplo: En el problema 4, después de algunos razonamientos, se puede deducir un día de la semana, que es la respuesta del problema. Una vez que se ha identificado el día, conviene volver

a leer el diálogo de Patrick y su vecino, para chequear que el diálogo pueda tener lugar ese día y que no haya contradicciones.

3 **Resolver a partir del error**: Utilizar las soluciones que resultaron falsas para construir una mejor. Es decir: errar y corregir, en vez de hacer borrón y cuenta nueva. Un mal hábito al resolver problemas consiste en tachar o borrar los errores. Por el contrario, cuando producimos una solución y descubrimos que el razonamiento está equivocado, conviene asignarle un "cartelito" que diga *Primer intento* y volver a intentarlo. La solución incorrecta puede aportar información útil y aprovechable para avanzar hacia la solución definitiva.
- Ejemplo: en el problema 4 podemos suponer que hoy es lunes. Enseguida veremos que esa suposición es incorrecta, porque, como el vecino de Patrick dice la verdad los días lunes, no podría responder que hoy es sábado (pues estaría mintiendo un lunes). ¿Es un error que debemos ocultar, borrar o tachar, el haber supuesto que la respuesta al problema era "hoy es lunes"? ¡De ninguna manera! Nos ha servido para comprender que hoy no es lunes. Aunque no sabemos aún TODA la verdad, sabemos ALGO que es verdad: ¡hoy no es lunes! Estamos mejor que antes de comenzar a resolver el problema. Por eso las respuestas equivocadas pueden ser muy útiles y no deben dejar de considerarse.

4 **Identificar casos similares**: A veces en un problema debemos considerar muchas posibilidades. Pero puede ocurrir que algunas posibilidades sean tan parecidas entre sí que alcance con analizar una sola de ellas para poder decir que todas las demás llevarán a la misma conclusión. Cuando uno puede clasificar estos casos parecidos, ahorra esfuerzo porque no necesita analizar cada uno de ellos.
- Ejemplo: En el ejemplo anterior, acerca del problema 4, se mostró un razonamiento que servía para justificar que hoy no puede ser lunes. Como el vecino de Patrick dice la verdad los lunes, nunca un lunes podrá decir que es sábado. Pero el mismo razonamiento vale para los miércoles, viernes y domingos, pues en esos días el vecino de Patrick también dice la verdad. Entonces no hace falta desarrollar la deducción en detalle: por la misma razón que hoy no puede ser lunes, tampoco puede ser miércoles, viernes ni domingo. Ahora la respuesta quedó reducida a tres casos posibles: es martes, es jueves o es sábado.

5 **Escribir ordenadamente**: Todo lo que escribamos en la resolución de un problema tiene que poder ser leído por otros ¡y por nosotros mismos! Los cálculos y dibujos no deben hacerse en cualquier lugar de la hoja en el que haya espacio. Hay que pensar que quien lo lea, siempre leerá de izquierda a derecha y de arriba a abajo y considerará que el texto fue escrito siguiendo ese orden. Si no somos cuidadosos y el desarrollo del problema es largo, nos puede llegar a pasar que ni nosotros mismos, después de unos días, podamos entender qué fue lo que quisimos escribir. Para ser claros es útil hacer listas numeradas con los pasos de la resolución (como la lista numerada que están leyendo en este apunte) y escribir utilizando todo el espacio que necesitemos, sin amontonar cálculos ni texto.
- Ejemplo: En el problema 1 habrán visto lo dificultoso que es recibir instrucciones poco claras o con letra poco legible. De hecho, uno de los principales objetivos de ese problema era convencerse de lo importante que es comunicarse con claridad.

6 **Utilizar terminología conveniente**: En matemática, como en cualquier disciplina, existe un vocabulario específico de conceptos que se definen con mucha precisión. La importancia de los nombres de las cosas es poder referirse a ellas para ser comprendido por otro.
- Ejemplo: En el problema 1 aparecieron seguramente algunos términos del campo de la geometría: segmento, recta, intersección, punto medio, paralelismo. Por supuesto, para que exista una comunicación clara, esos términos deben ser conocidos por el que escribe las instrucciones y por el que las va a leer.

7 **Ensayo y error**: Es similar a lo explicado en el punto 3. Se trata de proponer una solución, cuando es fácil chequear si la solución es correcta o no. Si no es correcta, se prueba con otra. Cuando el número de soluciones posibles es pequeño, se puede, por tanteo, ir intentando con todas las posibilidades hasta encontrar la correcta (en caso de que exista alguna).
- Ejemplo: El ya mencionado problema 4. En dicho problema hay solo 7 posibles respuestas (los siete días de la semana). Entonces, es posible ir proponiendo todos los días, uno por uno, porque descartar seis días no es una tarea muy larga y puede conducirnos a la solución. En algunos

problemas puede ocurrir que haya infinitas soluciones posibles y el método de ensayo y error no sea muy conveniente.

8 **Reducir al absurdo**: Como dice Smullyan en uno de sus libros de problemas lógicos (ver bibliografía: [19]): *Frente a un problema, una vez que todo lo imposible ha sido descartado, lo que quede forzosamente debe ser la verdad*. La reducción al absurdo consiste en ir descartando las soluciones absurdas, que llevan a contradicciones, para, por descarte, determinar la solución correcta.

- Ejemplo: El problema 5 se puede resolver mediante un razonamiento por el absurdo, de la siguiente manera:
  - La primera cuenta es $6+8=14$, que es correcta. Por lo tanto pueden pasar dos cosas: las teclas 6 y 8 funcionan bien o la calculadora intercambia las teclas 6 y 8 (es decir, al presionar 6 pone 8 y al presionar 8 pone 6). NO HAY NINGUNA OTRA ALTERNATIVA POSIBLE DISTINTA DE ESTAS DOS.

$$\begin{array}{ccccc}
\multicolumn{5}{c}{\text{Caso 1: teclas correctas}} \\
6 & + & 8 & = & 14 \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
6 & + & 8 & = & 14
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
\multicolumn{5}{c}{\text{Caso 2: teclas cruzadas}} \\
6 & + & 8 & = & 14 \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
8 & + & 6 & = & 14
\end{array}$$

  - Ahora viene la suposición: supongamos que las teclas 6 y 8 funcionan bien (Caso 1). La segunda cuenta es $2+5+6=15$, que es falsa, pues en realidad es $2+5+6=13$. Como estamos suponiendo que la tecla 6 funciona bien, el error debe venir de la tecla 2 o de la tecla 5 (Y NO HAY OTRA ALTERNATIVA POSIBLE).
  - Si el error viene de la tecla 2, para que sea $2+5+6=15$ la tecla 2 debería intercambiarse con la tecla 4. Si el error viene de la tecla 5, para que sea $2+5+6=15$ la tecla 5 debería intercambiarse con la tecla 7:

$$\begin{array}{cccccccc}
\multicolumn{8}{c}{\text{Caso 1a: teclas 2 y 4 cruzadas}} \\
2 & + & 5 & + & 6 & = & 15 & \text{Incorrecto} \\
\downarrow & & & & & & & \\
4 & + & 5 & + & 6 & = & 15 & \text{Correcto}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccccc}
\multicolumn{8}{c}{\text{Caso 1b: teclas 5 y 7 cruzadas}} \\
2 & + & 5 & + & 6 & = & 15 & \text{Incorrecto} \\
 & & \downarrow & & & & & \\
2 & + & 7 & + & 6 & = & 15 & \text{Correcto}
\end{array}$$

  - Veamos ahora la tercera cuenta: $1+2+3+8=12$. Esta cuenta es incorrecta. Pero estamos suponiendo que se da el Caso 1 y, por lo tanto, el Caso 1a o bien el Caso 1b. Según el Caso 1a, el 2 vale 4 y tenemos:

$$\begin{array}{lllllllll}
\multicolumn{9}{c}{\text{Caso 1a}} \\
1 & + & 2 & + & 3 & + & 8 & = & 12 \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
1 & + & 4 & + & 3 & + & 8 & = & 12
\end{array}$$

    Pero así, la tercera cuenta es también incorrecta, pues en realidad es $1+4+3+8=16$. Por lo tanto el Caso 1a es absurdo. Nos queda la esperanza del Caso 1b. Según este caso, el 5 vale 7 y todas las demás teclas funcionan bien. Pero entonces la tercera cuenta es exactamente lo que dice: $1+2+3+8=16$ y es incorrecta. Así, el Caso 1b es también absurdo.
  - Pero los Casos 1a y 1b se desprendían, como únicas posibilidades, del Caso 1. Por lo tanto, el Caso 1 es absurdo y solo queda la posibilidad de que valga el Caso 2: las teclas 6 y 8 están intercambiadas.
  - Pueden verificar que esta posibilidad no produce errores en las cuentas segunda y tercera. Por lo tanto, es la respuesta correcta del problema (¡Y la única posible, ya que las demás se han descartado, reduciéndolas al absurdo).